Manuscript-Nr.
(will be inserted by hand later)

Sur l'annulation du deuxième foncteur de (co)homologie d'André-Quillen

Francesc Planas-Vilanova

Departament de Matemàtica Aplicada I. ETSEIB. Universitat Politècnica de Catalunya. Diagonal 647, E-08028 Barcelona. E-mail address: planas@ma1.upc.es

Received ¡date¿ / Accepted ¡date¿

Abstract. For a given ideal I of a commutative ring A, $B = A/I$, the vanishing of the second André-Quillen (co)homology functor $H_2(A, B, \cdot)$ is characterized in terms of the canonical homomorphism $\alpha : \mathbf{S}(I) \to \mathbf{R}(I)$ from the symmetric algebra of the ideal I onto its Rees algebra. This is done by introducing a Koszul complex that characterizes commutative graded algebras which are symmetric algebras.

1. Introduction

Soit I un idéal d'un anneau commutatif A et soit $B = A/I$. On dénote par $\alpha : \mathbf{S}(I) \to \mathbf{R}(I)$ le morphisme canonique entre l'algèbre symétrique de l'idéal I et l'algèbre de Rees de I, c'est à dire que $\mathbf{R}(I) = \oplus_{q\geq 0} I^q$; on dénote par $\beta : \mathbf{S}^B(I/I^2) \to \mathbf{G}(I)$ le morphisme canonique entre l'algèbre symétrique du B-module I/I^2 et l'anneau gradué associé à l'idéal I, c'est à dire que $\mathbf{G}(I) = \oplus_{q\geq 0} I^q/I^{q+1}$, et on dénote par $\gamma : \Lambda^B(I/I^2) \to \mathrm{Tor}_*^A(B, B)$ le morphisme canonique entre l'algèbre extérieure du B-module I/I^2 et la B-algèbre graduée anticommutative $\mathrm{Tor}_*^A(B, B)$. Les trois morphismes sont gradués de degré zero et les deux premiers sont exhaustifs. Finalement, on dénote par $\tau_{n,q} : \mathrm{Tor}_n^A(A/I^q, B) \to \mathrm{Tor}_n^A(A/I^{q-1}, B)$ le morphisme canonique, pour deux entiers $n, q \geq 1$.

Les résultats suivants dûs à Quillen ([8]) et André ([3]), respectivement, établissent une relation entre l'annulation des foncteurs d'homologie d'André-Quillen $H_n(A, B, \cdot)$ et les morphismes γ et β.

Théorème. (Quillen) *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $H_n(A, B, W) = 0$ *pour tout* $n \geq 2$ *et tout* B*-module* W.
(ii) γ *est un isomorphisme et* I/I^2 *est un* B*-module plat.*

Théorème. (André) *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(*i*) $H_n(A,B,W)=0$ *pour tout* $n\geq 2$ *et tout* B*-module* W.
(*ii*) β *est un isomorphisme,* I/I^2 *est un* B*-module plat et* $\tau_{n,q}=0$ *pour tout* $n,q\geq 2$.

Dans ce travail nous caractériserons spécifiquement l'annulation du deuxième foncteur d'homologie d'André-Quillen selon les morphismes α, β et γ. Le résultat principal obtenu est le suivant:

Théorème. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*i*) $H_2(A,B,W)=0$ *pour tout* B*-module* W.
(*ii*) α *est un isomorphisme et* I/I^2 *est un* B*-module plat.*
(*iii*) β *est un isomorphisme,* I/I^2 *est un* B*-module plat et* $\tau_{2,q}=0$ *pour tout* $q\geq 2$.
(*iv*) γ_2 *est un isomorphisme et* I/I^2 *est un* B*-module plat.*

Comme corollaire de ce théorème on obtient le résultat suivant dû à André ([3]):

Corollaire. (André) *Si* $H_2(A,B,W)=0$ *pour tout* B*-module* W*, alors* β *est un isomorphisme et* I/I^2 *est un* B*-module plat.*

Remarque. À l'aide d'un complex de Koszul que nous introduirons pour prouver le théorème précédent nous trouverons un contrexemple du réciproque de ce corollaire.

2. Un complexe de Koszul qui caractérise les algèbres commutatives graduées qui sont symétriques

Soit $R=\oplus_{q\geq 0}R_q$ une A-algèbre commutative graduée, avec $R_0=A$, et engendrée, comme A-algèbre, par R_1 (par exemple, $\mathbf{S}(M)$ l'algèbre symétrique d'un module M, ou bien $\mathbf{R}(I)$ l'algèbre de Rees d'un idéal I). On dira que R est une A-algèbre cgc$_1$ (*c*ommutative *g*raduée *c*onnexe et engendrée par des éléments de degré 1).

Soit $\pi : R_1\otimes R\to R$ le morphisme produit $\pi(x\otimes y)=xy$ et soit $\mathcal{K}(\pi)$ le complexe de Koszul de la forme R-linéaire π (voir [4]). Lorsque π est homogène de degré zéro, $\mathcal{K}(\pi)$ est un complexe de R-modules gradués ayant comme différentielles des morphismes gradués de degré zéro de R-modules. On le dénotera par $\mathcal{K}(R)$ et on l'appelera le *complexe de Koszul de* R. Concrètement, $\mathcal{K}(R)$ est un complexe gradué avec $\mathcal{K}(R)=\underset{n\geq 0}{\oplus}\mathcal{K}(R)_n$, où $\mathcal{K}(R)_n$ dénote le subcomplexe partie homogène de degré n, c'est à dire:

$$0\longrightarrow \Lambda^A_n(R_1)\xrightarrow{\partial_{n,0}}\Lambda^A_{n-1}(R_1)\underset{A}{\otimes}R_1\xrightarrow{\partial_{n-1,1}}\Lambda^A_{n-2}(R_1)\underset{A}{\otimes}R_2\longrightarrow\ldots$$

$$\ldots\longrightarrow\Lambda^A_p(R_1)\underset{A}{\otimes}R_{n-p}\xrightarrow{\partial_{p,n-p}}\Lambda^A_{p-1}(R_1)\underset{A}{\otimes}R_{n-(p-1)}\longrightarrow\ldots$$

$$\ldots\longrightarrow\Lambda^A_2(R_1)\underset{A}{\otimes}R_{n-2}\xrightarrow{\partial_{2,n-2}}R_1\underset{A}{\otimes}R_{n-1}\xrightarrow{\partial_{1,n-1}}R_n\longrightarrow 0\ ,$$

avec $\partial_{p,n-p}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \otimes y) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{x}_i \wedge \ldots \wedge x_p \otimes x_i y$, pour tout $x_i \in R_1$ et $y \in R_{n-p}$. En particulier, pour chaque $p \geq 0$, $H_p(\mathcal{K}(R)) = \bigoplus_{n\geq 0} H_p(\mathcal{K}(R))_n$ est un A-module gradué, où $H_p(\mathcal{K}(R))_n = H_p(\mathcal{K}(R)_n)$.

Proposition 2.1. *Soit R une A-algèbre cgc$_1$ et soit $\alpha : \mathbf{S}(R_1) \to R$ le morphisme canonique. Alors, il existe un isomorphisme gradué de degré zéro de R-modules*

$$H_1(\mathcal{K}(R)) = \frac{\mathrm{Ker}\alpha}{\mathbf{S}_+(R_1) \cdot \mathrm{Ker}\alpha} \, .$$

En particulier, la composante α_q est un isomorphisme pour tout q, $2 \leq q \leq n$, si et seulement si $H_1(\mathcal{K}(R)_q) = 0$ pour tout q, $2 \leq q \leq n$.

Pour prouver la proposition on a besoin du fait suivant.

Lemme 2.2. *Si M est un A-module, alors $H_1(\mathcal{K}(\mathbf{S}(M))) = 0$. D'ailleurs, si M est A-plat ou bien si A contient le corps des nombres rationels, alors $H_p(\mathcal{K}(\mathbf{S}(M))) = 0$ pour tout $p \geq 2$.*

Démonstration du Lemme 2.2. Il suffit de prouver que $H_1(\mathcal{K}(\mathbf{S}(M))_n) = 0$ pour chaque $n \geq 0$. D'après les propietés fonctorielles du foncteur de symétrisation, $\mathrm{Ker}\partial_{1,n-1}$ n'est que le A-module engendré par les éléments $x_1 \otimes (y_2 y_3 \cdots y_n) - y_2 \otimes (x_1 y_3 \cdots y_n)$ avec $x_1, y_i \in M$ et $y_2 y_3 \cdots y_n$ représentant le produit des y_i dans $\mathbf{S}_{n-1}(M)$. C'est à dire, par les éléments $u \otimes (vy) - v \otimes (uy)$ avec $u, v \in M$ et $y \in \mathbf{S}_{n-2}(M)$. D'où, $\mathrm{Ker}\partial_{1,n-1} = \mathrm{Im}\partial_{2,n-2}$. La démonstration de la deuxième assertion se suit du fait que le complexe $\mathcal{K}(\mathbf{S}(M))$ s'identifie au complexe $\mathbf{S}(M) \otimes \Lambda(M)$ de [4] (voir page 151 de [4], ou bien [7]). ∎

Démonstration de la Proposition 2.1. Comme $\alpha : \mathbf{S}(R_1) \to R$ est un morphisme gradué, $\mathrm{Ker}\alpha$ est un idéal homogène de $\mathbf{S}(R_1)$ et $\mathrm{Ker}\alpha/(\mathbf{S}_+(R_1) \cdot \mathrm{Ker}\alpha)$ est un A-module gradué. Lorsque $\mathbf{S}_i(R_1) \cdot \mathrm{Ker}\alpha_j \subseteq \mathbf{S}_{i-1}(R_1) \cdot \mathrm{Ker}\alpha_{j+1}$ pour tout $i, j \geq 2$, la composante de degré $n \geq 0$ du A-module gradué $\mathrm{Ker}\alpha/(\mathbf{S}_+(R_1) \cdot \mathrm{Ker}\alpha)$ est $\mathrm{Ker}\alpha_n/(R_1 \cdot \mathrm{Ker}\alpha_{n-1})$. Il faut donc voir que pour chaque $n \geq 0$ il existe un isomorphisme de A-modules:

$$H_1(\mathcal{K}(R)_n) = \frac{\mathrm{Ker}\alpha_n}{R_1 \cdot \mathrm{Ker}\alpha_{n-1}} \, . \tag{1}$$

Prouvons (1) pour $n \geq 2$ (pour $n = 0; 1$ c'est évident). Lorsque R est engendrée par des éléments de degré 1, pour chaque $n \geq 2$ la suite de A-modules suivante est exacte:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\alpha_{n-1} \longrightarrow \mathbf{S}_{n-1}(R_1) \xrightarrow{\alpha_{n-1}} R_{n-1} \longrightarrow 0 \, .$$

En faisant le produit tensoriel par R_1 on obtient la suite exacte:

$$R_1 \underset{A}{\otimes} \mathrm{Ker}\alpha_{n-1} \longrightarrow R_1 \underset{A}{\otimes} \mathbf{S}_{n-1}(R_1) \xrightarrow{1_{R_1} \otimes \alpha_{n-1}} R_1 \underset{A}{\otimes} R_{n-1} \longrightarrow 0 \, ,$$

d'où le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Ker}\partial^{\mathrm{S}}_{1,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\partial^{R}_{1,n-1} \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
 & R_1 \otimes \mathrm{Ker}\alpha_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & R_1 \otimes \mathbf{S}_{n-1}(R_1) \arrow[r, "1\otimes\alpha_{n-1}"] \arrow[d] & R_1 \otimes R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\alpha_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{S}_n(R_1) \arrow[r, "\alpha_n"'] \arrow[d] & R_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \frac{\mathrm{Ker}\alpha_n}{R_1\cdot\mathrm{Ker}\alpha_{n-1}} \arrow[r] & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

D'après le diagramme du serpent, la suite de A-modules suivante est exacte:

$$0 \longrightarrow (1\otimes\alpha_{n-1})\left(\mathrm{Ker}\partial^{\mathrm{S}}_{1,n-1}\right) \longrightarrow \mathrm{Ker}\partial^{R}_{1,n-1} \longrightarrow \frac{\mathrm{Ker}\alpha_n}{R_1\cdot\mathrm{Ker}\alpha_{n-1}} \longrightarrow 0 \ . \tag{2}$$

D'après le Lemme 2.2, $H_1(\mathcal{K}(\mathbf{S}(R_1))) = 0$. C'est à dire que

$$\mathrm{Ker}\partial^{\mathrm{S}}_{1,n-1} = \mathrm{Im}\partial^{\mathrm{S}}_{2,n-2} = < v\otimes uy - u\otimes vy \mid u,v\in R_1, y\in \mathbf{S}_{n-2}(R_1) >_A \ .$$

Et ainsi,

$$\begin{aligned}
&(1\otimes\alpha_{n-1})(\mathrm{Ker}\partial^{\mathrm{S}}_{1,n-1}) = \\
&(1\otimes\alpha_{n-1})\left(< v\otimes uy - u\otimes vy \mid u,v\in R_1, y\in \mathbf{S}_{n-2}(R_1) >\right) = \\
&< v\otimes uz - u\otimes vz \mid u,v\in R_1, z\in R_{n-2} >_A = \mathrm{Im}\partial^{R}_{2,n-2} \ .
\end{aligned} \tag{3}$$

Finalement, de (3) et (2) on obtient que

$$H_1(\mathcal{K}(R)_n) = \frac{\mathrm{Ker}\partial^{R}_{1,n-1}}{\mathrm{Im}\partial^{R}_{2,n-2}} = \frac{\mathrm{Ker}\partial^{R}_{1,n-1}}{(1\otimes\alpha_{n-1})(\mathrm{Ker}\partial^{\mathrm{S}}_{1,n-1})} = \frac{\mathrm{Ker}\alpha_n}{R_1\cdot\mathrm{Ker}\alpha_{n-1}} \ . \ \blacksquare$$

Corollaire 2.3. *Soit I un idéal d'un anneau A et soit $\alpha : \mathbf{S}(I) \to \mathbf{R}(I)$ le morphisme canonique. Alors, α_q est un isomorphisme pour tout q, $2 \le q \le n$, si et seulement si les complexes de A-modules suivants sont exacts pour tout q, $2 \le q \le n$,*

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda_2(I)\otimes I^{q-2} & \xrightarrow{\partial_{2,q-2}} & I\otimes I^{q-1} & \xrightarrow{\partial_{1,q-1}} & I^q \\
(u\wedge v)\otimes y & \longmapsto & v\otimes uy - u\otimes vy & & \\
 & & x\otimes y & \longmapsto & xy
\end{array}$$

Les idéaux I dont le morphisme canonique $\alpha : \mathbf{S}(I) \to \mathbf{R}(I)$ est un isomorphisme sont appelés de *type linéaire* et ceux dont la deuxième composante $\alpha_2 : \mathbf{S}_2(I) \to I^2$ est un isomorphisme sont appelés *syzygétiques* (voir, par exemple [5], [7], [9]).

De la Proposition 2.1, et en utilisant les mêmes notations de l'introduction, on obtient deux corollaires: l'un qui fait voir la relation entre α et β (voir à ce propos, 1.3 de [9]); et l'autre qui fait voir la relation entre α_2 et γ_2 (voir 2.5 et 2.6 de [5]).

Corollaire 2.4. *α est un isomorphisme si et seulement si β est un isomorphisme et $\tau_{2,q} = 0$ pour tout $q \geq 2$.*

Démonstration. Pour chaque $q \geq 2$, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
\Lambda_2(I) \otimes I^{q-1} \arrow[r, "\partial_{2,q-1}"] \arrow[d, "\eta_{2,q-1}"] & I \otimes I^q \arrow[r, "\partial_{1,q}"] \arrow[d, "\eta_{1,q}"] & I^{q+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\Lambda_2(I) \otimes I^{q-2} \arrow[r, "\partial_{2,q-2}"] \arrow[d, "\rho_{2,q-2}"] & I \otimes I^{q-1} \arrow[r, "\partial_{1,q-1}"] \arrow[d, "\rho_{1,q-1}"] & I^q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\Lambda_2^B(\frac{I}{I^2}) \otimes \frac{I^{q-2}}{I^{q-1}} \arrow[r, "\overline{\partial}_{2,q-2}"] \arrow[d] & \frac{I}{I^2} \otimes \frac{I^{q-1}}{I^q} \arrow[r, "\overline{\partial}_{1,q-1}"] \arrow[d] & I^q/I^{q+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les lignes représentent, de haut en bas, les trois derniers termes des complexes $\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_{q+1}$, $\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_q$ et $\mathcal{K}(\mathbf{G}(I))_q$. Remarquons que la ligne inférieure s'obtient en faisant le produit tensoriel de celle du milieu par B. La colonne de la gauche et celle du milieu sont la colonne de la droite en degrés $q-2$ et $q-1$ après avoir fait le produit tensoriel par $\Lambda_2(I)$ et I respectivement. En particulier, les trois colonnes sont des suites exactes.

D'ailleurs, $\mathrm{Im}\partial_{2,q-2} \subseteq \mathrm{Ker}\partial_{1,q-1} = \mathrm{Tor}_1^A(B, I^{q-1}) = \mathrm{Tor}_2^A(B, A/I^{q-1})$ et la différentielle $\partial_{2,q-2} : \Lambda_2(I) \otimes I^{q-2} \to I \otimes I^{q-1}$ induit l'homomorphisme $\upsilon_{2,q-2} : \Lambda_2(I) \otimes I^{q-2} \to \mathrm{Tor}_2^A(B, A/I^{q-1})$ pour chaque $q \geq 2$. Alors, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_2(I)\otimes I^{q-1} \arrow[r, "\upsilon_{2,q-1}"] \arrow[d, "\eta_{2,q-1}"'] & \mathrm{Tor}_2^A(B,A/I^q) \arrow[d, "\tau_{2,q}"] \\
\Lambda_2(I)\otimes I^{q-2} \arrow[r, "\upsilon_{2,q-2}"] \arrow[d, "\rho_{2,q-2}"'] & \mathrm{Tor}_2^A(B,A/I^{q-1}) \arrow[d] \\
\Lambda_2^B(\frac{I}{I^2})\otimes \frac{I^{q-2}}{I^{q-1}} \arrow[r, "\overline{\upsilon}_{2,q-2}"] \arrow[ur, dashed, "\sigma_{2,q-2}"] & \mathrm{Ker}\overline{\partial}_{1,q-1}
\end{tikzcd}$$

Lorsque $\mathrm{Tor}_2^A(B,A/I^{q-1})$ est un B-module, $\upsilon_{2,q-2}$ factorise à $\sigma_{2,q-2}$.

Suposons que α_q est un isomorphisme pour tout q, $2\leq q\leq n$. Alors, et d'après le Corollaire 2.3, $\upsilon_{2,q-2}$ est un épimorphisme pour tout q, $2\leq q\leq n$. En particulier, et lorsque la colonne de la gauche est un complexe, $\tau_{2,q}=0$ pour tout entier q, $1\leq q\leq n-1$.

Réciproquement, que β soit un isomorphisme c'est équivalent au fait que $\overline{\upsilon}_{2,q-2}$ soit un épimorphisme pour tout $q\geq 2$. De l'hypothèse $\tau_{2,q}=0$ pour tout $q\geq 2$, il en résulte que $\upsilon_{2,q-2}$ est un épimorphisme pour tout $q\geq 2$ et ceci est équivalent au fait que α soit un isomorphisme. ∎

Corollaire 2.5. *α_2 est un isomorphisme si et seulement si γ_2 est un épimorphisme. D'autre part, si $H_2(\mathcal{K}(\mathbf{S}^B(I/I^2))_2)=0$, alors γ_2 est un monomorphisme.*

Démonstration. Considérons le dernier diagramme du corollaire précédent. Comme $\rho_{2,q-2}$ est un épimorphisme,

$$\mathrm{Im}\sigma_{2,q-2}=\mathrm{Im}\upsilon_{2,q-2}=\mathrm{Im}\partial_{2,q-2}\subseteq \mathrm{Ker}\partial_{1,q-1}=\mathrm{Tor}_2^A(B,A/I^{q-1})\,. \tag{4}$$

D'autre part, si $q\geq 2$ et si $x,y\in I$ et $z\in I^{q-2}$, alors $\sigma_{2,q-2}$ est définit par

$$\sigma_{2,q-2}((\overline{x}\wedge\overline{y})\otimes\overline{z})=\partial_{2,q-2}((x\wedge y)\otimes z)=y\otimes(xz)-x\otimes(yz)\,.$$

D'où pour $q=2$, on a que $\sigma_{2,0}=\gamma_2$ (voir [1]). Par conséquent, que α_2 soit un isomorphisme, que $\upsilon_{2,0}$ soit un épimorphisme ou que $\sigma_{2,0}=\gamma_2$ soit un épimorphisme, sont trois conditions équivalentes.

D'ailleurs, si $H_2(\mathcal{K}_2(\mathbf{S}^B(I/I^2))_2)=0$, alors $\overline{\upsilon}_{2,0}$ est un monomorphisme et celà entraîne que $\sigma_{2,0}=\gamma_2$ soit un monomorphisme. ∎

Remarque 2.6. Dans la dernière démonstration, on déduit de (4) que, pour chaque $q\geq 2$, $H_1(\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_q)=\mathrm{Coker}\sigma_{2,q-2}$. En calculant $\mathrm{Tor}_2^A(B,A/I^{q-1})$ avec une présentation A-plate de l'idéal I et en utilisant la Proposition 2.1, on peut récupérer une expression du quotient du $\mathrm{Ker}\alpha$ par $\mathbf{S}_+(I)\cdot\mathrm{Ker}\alpha$ démontrée par Kühl dans le cas d'un idéal de type finit (voir 1.2 de [6] et [7]).

3. Annulation du groupe $H_2(A,B,\mathrm{G}(I))$

Soit I un idéal d'un anneau A et soit $B=A/I$. Soit $f:F\to A$ une présentation A-plate de l'idéal I, c'est à dire que F est un A-module plat et f est un morphisme de A-modules avec $f(F)=I$. Soit $\mathcal{K}(f)$ le complexe de Koszul de f et soient ∂_*, $Z_* = \mathrm{Ker}\partial_*$ et $B_* = \mathrm{Im}\partial_{*+1}$ la différentielle, les cycles et les bords de $\mathcal{K}(f)$, respectivement.

Pour chaque B-module W (voir 15.12 [2]) il existe une suite exacte de B-modules:

$$0 \to H_2(A, B, W) \to H_1(\mathcal{K}(f)) \underset{B}{\otimes} W \xrightarrow{\eta} F \otimes W \to I \otimes W \to 0$$

où, pour chaque $x \in Z_1$ et $y \in W$, le morphisme $\eta : H_1(\mathcal{K}(f)) \underset{B}{\otimes} W \to F \otimes W$ est définit par $\eta\left((x + B_1) \otimes y\right) = x \otimes y$.

Soit J un autre idéal de A et soit $\mathcal{L}(I; J)$ le complexe, concentré en degrés 0, 1 et 2, définit par

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_2(I) \otimes J & \xrightarrow{l_2} & I \otimes IJ & \xrightarrow{l_1} & I \otimes J \\ (u \wedge v) \otimes y & \longmapsto & v \otimes uy - u \otimes vy & & \\ & & u \otimes y & \longmapsto & u \otimes y \end{array}$$

Avec ces notations, on a la proposition suivante:

Proposition 3.1. *Il existe* $\xi : H_1(\mathcal{K}(f)) \otimes_B J/IJ \longrightarrow JZ_1/JB_1$, *épimorphisme de* B*-modules, tel que* $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\xi) \longrightarrow H_2(A, B, J/IJ) \longrightarrow H_1(\mathcal{L}(I; J)) \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de* B*-modules.*

Démonstration. Considérons $0 \to B_1 \to Z_1 \to H_1(\mathcal{K}(f)) \to 0$ et faisons le produit tensoriel par J:

$$\begin{tikzcd} & B_1 \otimes J \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \otimes J \arrow[r] \arrow[d] & \frac{Z_1}{B_1} \otimes J \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\xi'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & JB_1 \arrow[r] & JZ_1 \arrow[r] & \frac{JZ_1}{JB_1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Soit $\xi' : H_1(\mathcal{K}(f)) \otimes J \to JZ_1/JB_1$ l'épimorphisme induit. Lorsque $H_1(\mathcal{K}(f))$ est un B-module, on a le morphisme ξ définit par la composition:

$$\xi : H_1(\mathcal{K}(f)) \underset{B}{\otimes} (J/IJ) \xrightarrow{\simeq} H_1(\mathcal{K}(f)) \underset{A}{\otimes} J \xrightarrow{\xi'} JZ_1/JB_1 \ .$$

Soit $\zeta' : JZ_1/JB_1 \to JF/JIF$ le morphisme induit par les inclusions $B_1 \subseteq IF$ et $Z_1 \subseteq F$. Comme F est un A-module plat, $JF/JIF \longrightarrow F \otimes_A (J/IJ)$ définit par $yx + JIF \mapsto x \otimes (y + IJ)$ ($x \in F$ et $y \in J$) est un isomorphisme. Soit ζ la composition suivante:

$$\zeta : JZ_1/JB_1 \xrightarrow{\zeta'} JF/JIF \xrightarrow{\simeq} F \underset{A}{\otimes} (J/IJ) \ .$$

On a $\eta = \zeta \circ \xi$ et ainsi la suite de B-modules $0 \to \mathrm{Ker}(\xi) \to \mathrm{Ker}(\eta) \to \mathrm{Ker}(\zeta) \to 0$ est exacte. Il reste à vérifier que $\mathrm{Ker}(\zeta) = H_1(\mathcal{L}(I; J))$. D'un côté on a que

$$\mathrm{Ker}(\zeta) = \mathrm{Ker}(\zeta') = \frac{JZ_1 \cap JIF}{JB_1} \ .$$

D'un autre côté, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_2^A(B, A/IJ) & \longrightarrow & I \otimes IJ & \longrightarrow & I^2J & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_1} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_2^A(B, A/J) & \longrightarrow & I \otimes J & \longrightarrow & IJ & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

D'après le lemme du serpent et en calculant les deux modules $\mathrm{Tor}_2(B, A/IJ)$ et $\mathrm{Tor}_2(B, A/J)$ avec la présentation A-plate $0 \to Z_1 \to F \to I \to 0$, on a que

$$\mathrm{Ker}\,(l_1 : I \otimes IJ \longrightarrow I \otimes J) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tor}_2(B, A/IJ) \longrightarrow \mathrm{Tor}_2(B, A/J)) =$$
$$= \mathrm{Ker}\left(\frac{Z_1 \cap IJF}{IJZ_1} \longrightarrow \frac{Z_1 \cap JF}{JZ_1}\right) = \frac{JZ_1 \cap IJF}{IJZ_1}\ .$$

Comme $\mathrm{Im} l_2 \subseteq \mathrm{Ker} l_1 \subseteq \mathrm{Tor}_2^A(B, A/IJ)$, alors

$$\mathrm{Im}\,(l_2 : \Lambda_2(I) \otimes J \to I \otimes IJ) = \mathrm{Im}\left(\Lambda_2(I) \otimes J \stackrel{l_2}{\to} \mathrm{Tor}_2(B, A/IJ)\right) = \frac{JB_1}{JIZ_1}\ .$$

Ainsi, $H_1(\mathcal{L}(I; J)) = \dfrac{\mathrm{Ker}(l_1)}{\mathrm{Im}(l_2)} = \dfrac{JZ_1 \cap IJF}{JB_1} = \mathrm{Ker}(\zeta') = \mathrm{Ker}(\zeta)$. ∎

Le corollaire suivant est un résultat bien connu:

Corollaire 3.2. *Soit I un idéal et soit $\alpha : \mathbf{S}(I) \to \mathbf{R}(I)$ le morphisme canonique. Alors $H_2(A, B, B) = \mathrm{Ker}\alpha_2$.*

Démonstration. Prenons dans la Proposition 3.1, $J = A$. Alors, $\mathrm{Ker}(\xi) = 0$ et, de cette façon, $H_2(A, B, B) = H_1(\mathcal{L}(I; A)) = H_1(\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_2) = \mathrm{Ker}\alpha_2$. ∎

Proposition 3.3. *Soit I un idéal de A tel que $H_2(\mathcal{K}(\mathbf{S}^B(I/I^2))) = 0$ (où $B = A/I$). Si $H_2(A, B, \mathbf{G}(I)) = 0$, alors α est un isomorphisme.*

Démonstration. On a que $0 = H_2(A, B, \mathbf{G}(I)) = \oplus_{t \geq 0} H_2(A, B, I^t/II^t)$ (voir 3.23 [2]). D'après la Proposition 3.1, $H_1(\mathcal{L}(I; I^t)) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Prouvons alors, par induction en $q \geq 2$, qu'avec l'hypothèse supplémentaire $H_2(\mathcal{K}(\mathbf{S}^B(I/I^2))) = 0$, α_q est un isomorphisme.

Si $q = 2$, on a déjà vu au lemme précédent que $H_1(\mathcal{L}(I; A)) = 0$ entraîne que α_2 soit un isomorphisme. Prenons maintenant $q \geq 2$ et suposons que α_p est un isomorphisme pour tout p, $2 \leq p \leq q$. Prouvons alors que α_{q+1} est un isomorphisme. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & \Lambda_2(I)\otimes I^{q-1} \arrow[r, "\partial_{2,q-1}", "l_{2,q-1}"'] \arrow[d, "\eta_{2,q-1}"] & I\otimes I^{q} \arrow[r, "\partial_{1,q}"] \arrow[d, "l_{1,q}"] & I^{q+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\Lambda_3(I)\otimes I^{q-3} \arrow[r, "\partial_{3,q-3}"] \arrow[d, "\rho_{3,q-3}"] & \Lambda_2(I)\otimes I^{q-2} \arrow[r, "\partial_{2,q-2}"] \arrow[d, "\rho_{2,q-2}"] & I\otimes I^{q-1} \arrow[r, "\partial_{1,q-1}"] \arrow[d, "\rho_{1,q-1}"] & I^{q} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\Lambda_3(\frac{I}{I^2})\otimes \frac{I^{q-3}}{I^{q-2}} \arrow[r, "\overline{\partial}_{3,q-3}"] \arrow[d] & \Lambda_2(\frac{I}{I^2})\otimes \frac{I^{q-2}}{I^{q-1}} \arrow[r, "\overline{\partial}_{2,q-2}"] \arrow[d] & \frac{I}{I^2}\otimes \frac{I^{q-1}}{I^{q}} \arrow[r, "\overline{\partial}_{1,q-1}"] \arrow[d] & I^{q}/I^{q+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où les quatre colonnes sont des suites exactes car les trois premières sont la quatrième en degrés $q-3$, $q-2$ et $q-1$ après avoir fait le produit tensoriel par $\Lambda_3(I)$, $\Lambda_2(I)$ et I, respectivement.

La ligne inférieure représente les quatre derniers termes de $\mathcal{K}(\mathbf{G}(I))_q$. D'après l'hypothèse d'induction, $\beta_p : \mathbf{S}_p^B(I/I^2) \to I^p/I^{p+1}$ est un isomorphisme pour chaque p, $2 \le p \le q$. Alors, β induit un isomorphisme de complexes

$$\mathcal{K}(\mathbf{S}^B(I/I^2))_q \simeq \mathcal{K}(\mathbf{G}(I))_q\,.$$

D'après le Lemme 2.2, $H_1(\mathcal{K}(\mathbf{S}^B(I/I^2))_q) = 0$ et, par hypothèse, on a que $H_2(\mathcal{K}(\mathbf{S}^B(I/I^2))_q) = 0$, d'où le fait que la ligne inférieure soit exacte.

La ligne du milieu représente les quatre derniers termes de $\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_q$. D'après la Proposition 2.1, et en utilisant l'hypothèse que α_q est un isomorphisme, $\mathrm{Ker}\partial_{1,q-1} = \mathrm{Im}\partial_{2,q-2}$.

La ligne supérieure représente les trois derniers termes de $\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_{q+1}$. Si on prouve que $H_1(\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_{q+1}) = 0$, alors d'après la Proposition 2.1, on aura que $\mathrm{Ker}\alpha_{q+1} = I \cdot \mathrm{Ker}\alpha_q$. Comme par hypothèse, $\mathrm{Ker}\alpha_q = 0$, cela entraînera que $\mathrm{Ker}\alpha_{q+1} = 0$. Voyons donc que $H_1(\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_{q+1}) = 0$.

Prenons $x \in \mathrm{Ker}\partial_{1,q}$, c'est à dire, $l_{1,q}(x) \in \mathrm{Ker}\partial_{1,q-1} = \mathrm{Im}\partial_{2,q-2}$. Alors, il existe $y \in \Lambda_2(I)\otimes I^{q-2}$ avec $\partial_{2,q-2}(y) = l_{1,q}(x)$. Prenons $\rho_{2,q-2}(y)$. On a que

$$\overline{\partial}_{2,q-2}(\rho_{2,q-2}(y)) = \rho_{1,q-1}(\partial_{2,q-2}(y)) = \rho_{1,q-1}(l_{1,q}(x)) = 0$$

c'est à dire que, $\rho_{2,q-2}(y) \in \mathrm{Ker}\overline{\partial}_{2,q-2}$. D'après l'exactitude de la ligne inférieure on déduit qu'il existe $z \in \Lambda_3(I/I^2)\otimes I^{q-3}/I^{q-2}$ avec $\overline{\partial}_{3,q-3}(z) = \rho_{2,q-2}(y)$.

Soit $t \in \Lambda_3(I)\otimes I^{q-3}$ avec $\rho_{3,q-3}(t) = z$ et considérons $y - \partial_{3,q-3}(t) \in \Lambda_2(I)\otimes I^{q-2}$. Alors, $\rho_{2,q-2}(y - \partial_{3,q-3}(t)) = \rho_{2,q-2}(y) - \overline{\partial}_{3,q-3}(\rho_{3,q-3}(t)) = \rho_{2,q-2}(y) - \overline{\partial}_{3,q-3}(z) = 0$. Par conséquent, (comme $\mathrm{Ker}\rho_{2,q-2} = \mathrm{Im}\eta_{2,q-1}$) il existe $u \in \Lambda_2(I)\otimes I^{q-1}$ avec $\eta_{2,q-1}(u) = y - \partial_{3,q-3}(t)$. On a que

$$0 = l_{1,q}(l_{2,q-1}(u)) = \partial_{2,q-2}(\eta_{2,q-1}(u)) = \partial_{2,q-2}(y) - \partial_{2,q-2}(\partial_{3,q-3}(t)) = l_{1,q}(x) \ .$$

Comme $H_1(\mathcal{L}(I; I^{q-1})) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker} l_{1,q}$, il existe $v \in \Lambda_2(I) \otimes I^{q-1}$ tel que $x = l_{2,q-1}(v) = \partial_{2,q-1}(v)$. C'est à dire que $x \in \mathrm{Im}\partial_{2,q-1}$. ∎

4. Démonstration du théorème

Avant de prouver le théorème, rappelons le résultat suivant:

Lemme 4.1. *Soient I un idéal de A, $B = A/I$ et $\alpha : \mathbf{S}(I) \to \mathbf{R}(I)$ le morphisme canonique. Pour chaque B-module W il existe un épimorphisme canonique de B-modules*

$$\omega : H_2(A, B, W) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^B(I/I^2, W)$$

et, α_2 est un isomorphisme si et seulement si ω est un isomorphisme pour chaque W.

Démonstration. Considérons $0 \to Z_1 \to F \to W \to 0$ une présentation de W comme B-module avec F un B-module plat. En y appliquant le foncteur d'homologie $H_*(A, B, \cdot)$ (3.22 [2]) on obtient la suite exacte de B-modules:

$$H_2(A,B,F) \to H_2(A,B,W) \to H_1(A,B,Z_1) \to H_1(A,B,F) \to H_1(A,B,W) \to \dots$$

Comme $B = A/I$, alors $H_1(A, B, \cdot) = I/I^2 \underset{B}{\otimes} \cdot$, et $H_0(A, B, \cdot) = \Omega_{B|A} \underset{B}{\otimes} \cdot = 0$ (voir 6.1 et 6.3 [2]). Alors, la suite suivante est exacte:

$$H_2(A,B,F) \to H_2(A,B,W) \to I/I^2 \underset{B}{\otimes} Z_1 \to I/I^2 \underset{B}{\otimes} F \to I/I^2 \underset{B}{\otimes} W \to 0 \ ,$$

d'où le fait que $H_2(A, B, F) \longrightarrow H_2(A, B, W) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Tor}_1^B(I/I^2, W) \longrightarrow 0$ soit une suite exacte de B-modules. Si α_2 est un isomorphisme, alors d'après le Corollaire 3.2, $H_2(A, B, B) = 0$. Lorsque F est un B-module plat, alors $H_2(A, B, F) = H_2(A, B, B) \otimes_B F = 0$ (voir 3.20 de [2]) et ω est un isomorphisme. Réciproquement, il suffit que ω soit un isomorphisme pour le B-module $W = B$. ∎

Théorème 4.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) $H_2(A, B, W) = 0$ *pour tout B-module W.*
- (ii) α *est un isomorphisme et I/I^2 est un B-module plat.*
- $(ii)'$ α_2 *est un isomorphisme et I/I^2 est un B-module plat.*
- (iii) β *est un isomorphisme, I/I^2 est un B-module plat et $\tau_{2,q} = 0$ pour tout $q \geq 2$.*
- $(iii)'$ β_2 *est un isomorphisme, I/I^2 est un B-module plat et $\tau_{2,2} = 0$.*
- (iv) γ_2 *est un isomorphisme et I/I^2 est un B-module plat.*
- (v) γ_2 *est un épimorphisme et I/I^2 est un B-module plat.*

Démonstration. Prouvons l'équivalence entre (i) et $(ii)'$. Si $H_2(A,B,\cdot)=0$, en particulier, α_2 est un isomorphisme et d'après le Lemme 4.1, $0=H_2(A,B,W)=\mathrm{Tor}_1^B(I/I^2,W)$ pour tout B-module W, c'est à dire que I/I^2 est un B-module plat.

Réciproquement, si α_2 est un isomorphisme et I/I^2 est un B-module plat, alors d'après le Lemme 4.1, $0=\mathrm{Tor}_1^B(I/I^2,W)=H_2(A,B,W)$ pour tout B-module W. C'est à dire que $H_2(A,B,\cdot)=0$.

Il est évident que (ii) implique $(ii)'$. Réciproquement, si I/I^2 est un B-module plat, alors d'après le Lemme 2.2, $H_2(\mathcal{K}(\mathbf{S}^B(I/I^2)))=0$. Lorsque α_2 est un isomorphisme et d'après le Lemme 4.1, $H_2(A,B,\mathbf{G}(I))=\mathrm{Tor}_1^B(I/I^2,\mathbf{G}(I))$. Mais ce dernier module est nul parce que I/I^2 est un B-module plat. Alors, $H_2(\mathcal{K}(\mathbf{S}^B(I/I^2)))=0$ et $H_2(A,B,\mathbf{G}(I))=0$, ce qui entraîne (d'après la Proposition 3.3) que α est un isomorphisme.

L'équivalence de (ii) et (iii) se déduit du Corollaire 2.4. La démonstration du même résultat implique que si β_2 est un isomorphisme et $\tau_{2,2}=0$, alors α_2 est un isomorphisme. Ainsi, on a que $(iii)'$ implique $(ii)'$.

Finalement l'équivalence entre $(ii)'$, (iv) et (v) se deduit du Corollaire 2.5. ∎

Remarque 4.3. Si on remplace la condition que I/I^2 soit un B-module plat par la condition que I/I^2 soit un B-module projectif on peut redémontrer le théorème précédent en remplaçant le module d'homologie par le correspondant module de cohomologie.

Nous finissons en donnant un exemple d'un idéal I d'un anneau A (nécessairement, non noéthérien) avec I/I^2 un $B=A/I$-module plat, $\beta:\mathbf{S}^B(I/I^2)\to\mathbf{G}(I)$ un isomorphisme, mais avec $H_2(A,B,B)\neq 0$.

Exemple 4.4. Soit k un corps et soit $A=k[X,Y_1,Y_2,\ldots]/J$ le quotient de l'anneau de polynômes par l'idéal J engendré par les elements XY_1, $XY_{i+1}-Y_i$ avec $i=1,2,\ldots$. Soit $I=(x)$ l'idéal de A engendré par la classe de X en A. Alors, I/I^2 est un $B=A/I$-module plat, $\beta:\mathbf{S}^B(I/I^2)\to\mathbf{G}(I)$ est un isomorphisme et $H_2(A,B,B)\neq 0$.

Démonstration. Soient $x,y_1,y_2,\ldots$ les classes des variables $X,Y_1,Y_2,\ldots$ module J . Lorsque I est un idéal principal, alors ce n'est pas difficile de prouver que, pour tout $q\geq 2$, $H_1(\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_q)=(0:x)\cap I^{q-1}$. Mais, $(0:x)\subseteq\bigcap_{q\geq 0}I^q$. En effet, soit $z\in(0:x)$, où z est la classe d'un polynôme Z en A. Alors, $ZX\in J\subseteq(Y_1,Y_2,\ldots)=H$. Lorsque $X\notin H$, $Z\in H$ car H est un idéal premier. C'est à dire que, $z=\sum a_iy_i$. Lorsque $y_p=xy_{p+1}=\ldots=x^qy_{p+q}$ en A, alors $z\in I^q$ pour tout q.

Ainsi, $H_1(\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_q)=(0:x)$ pour tout $q\geq 2$. Comme $y_1\in(0:x)$ et $y_1\neq 0$, on a que

$$0\neq(0:x)=H_1(\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_2)=\mathrm{Ker}\alpha_2=H_2(A,B,B)\ .$$

Voyons que β est un isomorphisme en prouvant que $H_1(\mathcal{K}(\mathbf{G}(I)))=0$. Comme I est un idéal principal, alors $\Lambda_2(I)=0$, $\mathrm{Im}\left(\Lambda_2(I)\otimes I^{q-2}\to I\otimes I^{q-1}\right)=0$ et

$$(0:x)=H_1(\mathcal{K}(\mathbf{R}(I))_q)=\frac{\mathrm{Ker}\partial_{1,q-1}}{\mathrm{Im}\partial_{2,q-2}}=\mathrm{Ker}\left(\partial_{1,q-1}:I\otimes I^{q-1}\longrightarrow I^q\right)\ .$$

Ainsi, pour chaque $q \geq 2$, la suite $0 \longrightarrow (0:x) \xrightarrow{\lambda} I \otimes I^{q-1} \xrightarrow{\partial_{1,q-1}} I^q \longrightarrow 0$, où $\lambda(z) = x \otimes z$, est exacte. En faisant le produit tensoriel par $B = A/I$, on obtient la suite exacte de B-modules:

$$(0:x) \otimes B \xrightarrow{\lambda \otimes 1_B} I/I^2 \otimes I^{q-1}/I^q \xrightarrow{\overline{\partial}_{1,q-1}} I^q/I^{q+1} \longrightarrow 0 \ ,$$

où $\lambda(z \otimes 1) = (x + I^2) \otimes (z + I^q) = 0$ car $z \in (0:x) \subseteq I^q$ pour tout $q \geq 1$. Donc, $0 = \mathrm{Ker}\overline{\partial}_{1,q-1} = H_1(\mathcal{K}(\mathbf{G}(I))_q) = 0$, pour tout $q \geq 2$. ∎

Remerciements. Je veux exprimer ma gratitude à José M. Giral pour de nombreuses idées et pour son aide à la réalisation de ce travail. Je veux remercier aussi Antonio G. Rodicio pour les très utiles conversations à propos de ce sujet et pour son encouragement.

Références

[1] André, M.: Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative. Lecture Notes in Math. **32**. Springer 1967.

[2] André, M.: Homologie des algèbres commutatives. Grundlehren **206**. Heidelberg: Springer 1974.

[3] André, M.: *Algèbres Graduées Associées et Algèbres Symétriques Plates.* Comm. Math. Helvetici **49**, (1974), 277-301.

[4] Bourbaki, N.: Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique. Masson. Paris, 1980.

[5] Herzog, J., Simis, A., Vasconcelos, W.V.: *Koszul homology and blowing-up rings.* Proc. Trento Commutative Algebra Conf., Lecture Notes in Pure and Applied Math. **84**, Marcel Dekker (1982), 79-169.

[6] Kühl, M.: *On the symmetric algebra of an ideal.* Manuscripta Math. **37** (1982), 49-60.

[7] Planas Vilanova, F.: Ideals de tipus lineal i homologia d'André-Quillen. Thèse, Universitat de Barcelona, 1994.

[8] Quillen, D.: *On the homology of commutative rings.* Proc. Symp. Pure Math. **17** (1970), 65-87.

[9] Valla, G.: *On the symmetric and Rees algebra of an ideal.* Manuscripta Math. **30** (1980), 239-255.